Concours Blanc de Mathématiques – MPSI – Corrigé

Noté sur 200 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/95
(95 points suffisent pour avoir 20).

/100 Problème d'Analyse – Fonction $t \mapsto t^{-1} \arctan t$ et sa primitive

Dans ce problème, on pourra utiliser sans justification le résultat suivant : pour tous réels a, b et pour toutes fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Les parties C et D sont indépendantes, mais utilisent les résultats des parties A et B.

Partie A : analyse de f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et pour tout $t \neq 0$ par $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$

/3 **1)** Montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(-t) = f(t)$. Si $t = 0$, c'est évident. Sinon,

$$f(-t) = \frac{\arctan(-t)}{-t} = \frac{-\arctan t}{-t} = f(t) \qquad \text{car arctan est impaire}$$

Ainsi, f est paire.

De plus, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ par quotient de telles fonctions. Montrons enfin que f est continue en 0. Pour tout $t \neq 0$, on a :

$$\frac{\arctan t}{t} = \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0} \xrightarrow[t \to 0]{} \arctan'(0) = \frac{1}{1 + 0^2} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

/3 **2)** **a)** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.

On a

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$$

donc par intégration de DL :

$$\arctan t = \cancel{\arctan 0} + t - \frac{t^3}{3} + \underset{t \to 0}{o}(t^3)$$

et ainsi,

$$f(t) = \boxed{\frac{\arctan t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)}$$

/2 **b)** En déduire que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
Note : on peut répondre à cette question en "admettant" les résultats des questions précédentes.

En tronquant le DL précédent, on voit que f admet un DL à l'ordre 1 en 0, donc est dérivable en 0. De plus, on a $\boxed{f'(0) = 0}$.

En admettant que f admet un DL_2 en 0 mais sans avoir su le calculer, on pouvait aussi utiliser le fait que f est paire pour en déduire que le coefficient d'ordre 1 est nul et aboutir à la même conclusion.

/2,5 **c)** Donner un équivalent de $f(t) - f(0)$ lorsque t tend vers 0. Que peut-on en déduire pour la courbe de f en 0 ?

Par le DL de la question a), on a $f(t) - f(0) \underset{t \to 0}{\sim} -\dfrac{t^2}{3}$. En particulier, on a $f(t) - f(0) \leq 0$ au voisinage de 0, donc f admet en 0 un maximum local.

/2 **3)** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \neq 0$, calculer $f'(t)$.

On a déjà vu que f est dérivable en 0. Sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f est dérivable par quotient de telles fonctions : ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \neq 0$, on a

$$\boxed{f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{1}{t^2} \arctan t}$$

4) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du = -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

/7

Pour tout $t \neq 0$, on a

$$\int_0^t \underbrace{\frac{2u}{(1+u^2)^2}}_{\frac{v'}{v^2}} \cdot \frac{u}{2} du = \left[-\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{u}{2} \right]_0^t - \int_0^t \left(-\frac{1}{2(1+u^2)} \right) du$$

$$= -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \arctan t$$

$$= -\frac{1}{2} t^2 \left(\frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\arctan t}{t^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} t^2 f'(t)$$

5) En déduire le tableau de variations de f. Vérifier que f admet un maximum global en 0.

/4

- Si $t > 0$ alors, comme $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du > 0$, on a $-\frac{1}{2} t^2 f'(t) > 0$ donc $f'(t) < 0$.
- Si $t < 0$ alors, comme $\int_0^t \frac{u^2}{(1+u^2)^2} du < 0$, on a $-\frac{1}{2} t^2 f'(t) < 0$ donc $f'(t) > 0$.

On a donc le tableau suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

Justifions les limites : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $-\frac{\pi}{2} < \arctan t < \frac{\pi}{2}$, donc $f(t) = \frac{\arctan t}{t} \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} 0$.

Enfin, on voit clairement sur le tableau ci-dessus que f admet un maximum global en 0.

Partie B : analyse de φ

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(0) = 1$ et pour tout $x \neq 0$ par $\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$.

On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, de sorte que pour tout $x \neq 0$, on a $\varphi(x) = \frac{F(x)}{x}$.

/3 **6)** Montrer que φ est paire et continue sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Si $x = 0$, c'est évident. Sinon,

$$\varphi(-x) = \frac{1}{-x} \int_0^{-x} f(t) dt \qquad u = -t \quad du = -dt$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x f(-u) du$$

$$= \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$$

$$= \varphi(x)$$

Ainsi, φ est paire.

De plus, l'application F est continue (et même dérivable de dérivée f), donc φ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par quotient de fonctions continues.

/5,5 **7)** Montrer que φ est continue et dérivable en 0, et que $\varphi'(0) = 0$.

Par la question **a)** , on a

$$f(t) = 1 - \frac{t^2}{3} + \underset{t \to 0}{o}(t^2)$$

Par intégration entre 0 et $x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$F(x) = \cancel{F(0)} + x - \frac{x^3}{9} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$$

et donc (avec $x \neq 0$)

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{9} + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Ainsi, comme φ admet un DL à l'ordre au moins 1 en 0 (et que φ est définie en 0), φ est continue et dérivable en 0, et $\varphi'(0) = 0$.

/9 **8)** Démontrer que pour tout $x \geq 1$, on a $0 \leq \displaystyle\int_1^x f(t)dt \leq \frac{\pi}{2}\ln x$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

Pour tout $t \in [1, x]$, on a $0 \leq f(t) = \dfrac{\arctan t}{t} \leq \dfrac{\pi}{2t}$, donc après intégration entre 1 et x, on obtient :

$$0 \leq \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^x \frac{\pi}{2t}dt = \frac{\pi}{2}[\ln t]_1^x = \boxed{\frac{\pi}{2}\ln x}$$

Or,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt + \frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt$$

et par ce qui précède, on a

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{par croissances comparées}$$

Donc par encadrement, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par ailleurs, $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (car $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ est une constante indépendante de x). Ainsi, par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0}$$

/6 **9)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$.
Indication : on pourra commencer par supposer $x > 0$.

Soit $x > 0$. Par la question **5)**, on a pour tout $t \in [0, x]$,

$$f(x) \leq f(t) \leq 1$$

et donc en intégrant selon t entre 0 et x, on en déduit que

$$\int_0^x f(x)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x 1dt$$

si bien que

$$f(x)x \leq \int_0^x f(t)dt \leq x$$

et donc en divisant par $x > 0$, on a $\boxed{f(x) \leq \varphi(x) \leq 1}$.

Comme f et φ sont paires, on a le même résultat pour $x < 0$. Enfin, pour $x = 0$, on a $f(0) = 1 \leq 1 = \varphi(0) \leq 1$. L'inégalité est donc démontrée pour tout $x \in \mathbb{R}$.

/3 **10)** Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))$.

F est de classe $\mathcal{C}^1$ car sa dérivée f est continue. Ainsi φ est aussi $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt = \boxed{\frac{1}{x}(f(x) - \varphi(x))}$$

/3,5 **11)** Dresser le tableau de variations de φ.

Par la question **9)**, on a $f(x) - \varphi(x) \leq 0$, d'où,

- Si $x > 0$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \varphi(x)) \leq 0$.
- Si $x < 0$, on a $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - \varphi(x)) \geq 0$.

Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

Justifions les limites : celle en $+\infty$ vaut 0 par la question **8)**. Celle en $-\infty$ vaut également 0 car φ est paire :

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{y\to+\infty} \varphi(-y) = \lim_{y\to+\infty} \varphi(y) = 0$$

Partie C : une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $\quad x^2y' + xy = \arctan x$.

/7,5 **12)** Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sur $]0,+\infty[$, on peut réécrire l'équation en $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}f(x)$. Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x) = Ce^{-\ln|x|} = \frac{C}{x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

La question **14)** laisse penser qu'une solution particulière serait :

$$y_p(x) = \varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$$

Vérifions-le. On a :

$$y_p'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x)$$

et ainsi

$$y_p'(x) + \frac{1}{x}y_p(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x) + \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}f(x)$$

donc $x^2y_p' + xy_p = xf(x) = \arctan x$: on a bien que y_p est solution sur $]0,+\infty[$. Ainsi, y est solution sur $]0,+\infty[$ si et seulement si

$$\boxed{y(x) = \frac{C}{x} + \varphi(x) \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

Sur $]-\infty,0[$, on peut encore réécrire l'équation en $y' + \frac{1}{x}y = f(x)$. Les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x) = De^{-\ln|x|} = \frac{D}{|x|} = -\frac{D}{x} \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}$$

(ce qu'on peut d'ailleurs réécrire en $y_H(x) = \frac{E}{x}$ avec $E \in \mathbb{R}$ car $D \mapsto -D$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Le reste est similaire à ce qu'on a fait précédemment : y est solution sur $]-\infty,0[$ si et seulement si

$$\boxed{y(x) = -\frac{D}{x} + \varphi(x) \qquad \text{avec } D \in \mathbb{R}}$$

/6 **13)** Soit y une solution (en supposant qu'elle existe) de (E). Que vaut $y(0)$?

Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Par ce qui précède, il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que pour tout réel x :

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C}{x} + \varphi(x) & \text{si } x > 0 \\ y(0) & \text{si } x = 0 \\ -\frac{D}{x} + \varphi(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Comme y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$, si bien que :

$$\lim_{x\to 0^-} y(x) = y(0) = \lim_{x\to 0^+} y(x)$$

Or, comme φ est continue en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = \varphi(0) = 1$: on en déduit que si $C \neq 0$ ou $D \neq 0$, une des deux limites ci-dessus serait infinie. Ainsi, nécessairement, $C = D = 0$, et $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = \boxed{1}$.

/6 **14)** Montrer que φ est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Par ce qui précède, on a

$$y(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \varphi(x) & x < 0 \end{cases}$$

Ainsi, $y(x) = \varphi(x)$.

Synthèse : réciproquement, vérifions que φ est solution de (E). Par la partie B, φ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par la question **12)**, φ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$0^2\varphi'(0) + 0\varphi(0) = 0 = \arctan 0$$

donc φ vérifie aussi l'équation en 0. Finalement,

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\varphi\}}$$

Partie D : une suite récurrente

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ donné, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

/2 **15)** **a)** Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq \dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$.

On raisonne par équivalences :

$$\begin{aligned} & 0 \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \\ \iff & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}(1+t^2) \\ \iff & 0 \leq 2t \leq 1+t^2 \end{aligned}$$

Montrons la dernière assertion : il est clair que $2t \geq 0$ puisque $t \geq 0$. De plus, $1+t^2-2t = (1-t)^2 \geq 0$, ce qui montre la deuxième inégalité. D'où le résultat.

b) Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x}(1-f(x)) = \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt$$

/5,5

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| &= \frac{1}{x}(\varphi(x) - f(x)) \\ &\leq \frac{1}{x}(1-f(x)) \qquad \text{par la question } \mathbf{9)} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt &= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt \\ &= \frac{1}{x^2}[t - \arctan t]_0^x \\ &= \frac{1}{x^2}(x - \arctan x) \\ &= \frac{1}{x}(1-f(x)) \end{aligned}$$

/7,5 **c)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.

- Pour $x = 0$, on a bien $|\varphi'(x)| = 0 \leq \dfrac{1}{4}$.
- Pour $x > 0$, par ce qui précède, on a

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}dt\right)$$

Or, par la question **a)** , pour tout $t \in [0,x]$, on a $\dfrac{t}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{t^2}{1+t^2} \leq \dfrac{t}{2}$, d'où

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{t}{2}dt = \frac{1}{x^2}\frac{x^2}{4} = \frac{1}{4}$$

- Pour $x < 0$, comme φ est paire, on peut montrer facilement que φ' est impaire. Ainsi,

$$|\varphi'(x)| = |-\varphi'(-x)| = |\varphi'(-x)| \leq \frac{1}{4} \qquad \text{car } -x > 0$$

16) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ admet une unique solution
/7 sur $\mathbb{R}_+$. On note α cette solution. Montrer que $0 < \alpha \leq 1$.

Par la question **11)**, φ est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application $g : x \mapsto \varphi(x) - x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Par le théorème de la bijection monotone, g est bijective de $\mathbb{R}_+$ dans $g(\mathbb{R}_+)$.

De plus, $g(0) = 1$ et $g(1) = \varphi(1) - 1 \leq 0$ par la question **9)**, donc (comme $g(\mathbb{R}_+)$ est un intervalle) $0 \in g(\mathbb{R}_+)$: comme g est bijective, il existe un unique antécédent de 0 par g dans $\mathbb{R}_+$, donc un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha = 0$.

Enfin, comme g est strictement décroissante, pour tout $x > 1$ on a $g(x) < g(1) \leq 0$, donc $\alpha \notin]1, +\infty[$, d'où $\alpha \leq 1$. Par ailleurs, $g(0) = 1$ donc $\alpha > 0$. Finalement, $\alpha \in]0,1]$.

17) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$. En déduire que (u_n)
/5 est convergente et préciser sa limite.

Par la question précédente,

$$|u_{n+1}-\alpha| = |\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)|$$

De plus, par l'inégalité des accroissement finis, comme φ est dérivable (donc continue sur $\mathbb{R}$) et que $|\varphi'| \leq \dfrac{1}{4}$ par la question **c)** , on en déduit que

$$|\varphi(u_n)-\varphi(\alpha)| \leq \boxed{\frac{1}{4}|u_n-\alpha|}$$

Ainsi, par récurrence immédiate, on a

$$|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha| \to 0 \qquad \text{car } \left|\frac{1}{4}\right| < 1$$

On en déduit que $|u_n-\alpha| \to 0$. Ainsi, (u_n) est convergente de limite α.

/100 Problème d'Algèbre – Polynômes annulateurs de matrices

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n désigne un entier naturel non nul, et $M_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes, n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. On notera I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $M_n(\mathbb{K})$. Enfin, A désigne une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $A^m = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{m \text{ fois}}$, avec la convention $A^0 = I_n$.

Par ailleurs, à tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$, on peut associer une matrice de $M_n(\mathbb{K})$, qu'on note $P(A)$, définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$$

Par exemple, avec $P = X^3-4X+2$, alors $P(A) = A^3-4A+2I_n$. Dans ce contexte, on dit qu'un polynôme P est <u>annulateur</u> de A si $P(A) = 0_n$.

Partie I : Exemples de polynômes annulateurs

On peut remarquer que le polynôme nul $P = 0$ est toujours un polynôme annulateur de A.

1) Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

/1,5 Montrer que $P = X^2 - 4$ est un polynôme annulateur de A.

On a

$$P(A) = A^2 - 4I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2$$

d'où le résultat.

2) Dans cette question, on s'efforcera d'allier concision et précision. Pour chacune des matrices A suivantes, déterminer un polynôme annulateur de A qui ne soit pas le polynôme nul :

/1,5 **a)** $A = I_n$

Soit $P = \boxed{X-1}$. Alors $P(A) = A - I_n = I_n - I_n = 0_n$. D'où le résultat.

/1,5 **b)** $A = 0_n$

Soit $P = \boxed{X}$. Alors $P(A) = A = 0_n$. D'où le résultat.

/3 **c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On remarque que $A^2 - 3A = 0_3$, donc $P = \boxed{X^2-3X}$ annule A.

/4 **d)** $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$, où p est un projecteur de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ une base quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Comme p est un projecteur, on a $p^2 = p$. On en déduit que $A^2 = A$, donc $P = \boxed{X^2 - X}$ annule A.

Partie II : Existence d'un polynôme annulateur non nul

/2 **3)** Donner (sans démonstration) la dimension de $M_n(\mathbb{K})$. Pour $n = 2$, donner également la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

La dimension de $M_n(\mathbb{K})$ est $\boxed{n^2}$.

Lorsque $n = 2$, la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$ est $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

/4 **4)** En déduire qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^m)$ est liée. On précisera une valeur de m qui ne dépend pas de A.

Soit $m = \boxed{n^2}$. La famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^m)$ est une famille à n^2+1 éléments. Comme $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$, il s'agit d'une famille liée.

/4 **5)** En déduire l'existence d'un polynôme annulateur de A non nul.

Par la question précédente, comme la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^m)$ est liée, il existe $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k = 0_n \qquad \text{et} \qquad (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m) \neq 0_{\mathbb{K}^{m+1}}$$

Ainsi, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$ annule A et ce polynôme est non nul par la seconde condition ci-dessus. D'où le résultat.

Partie III : Ensemble des polynômes annulateurs

On pourra utiliser sans démonstration les propriétés suivantes : pour tous polynômes P, Q de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

- $(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)$
- $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$
- $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A) = (QP)(A)$

Étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note N_A l'ensemble des polynômes annulateurs de A, c'est-à-dire

$$N_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0_n\}$$

/2,25 **6)** Montrer que N_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

On a $N_A \subset \mathbb{K}[X]$ par définition.

- On a vu en début de partie I que le polynôme nul est dans N_A.
- Soit $P, Q \in N_A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)(A) &= (\alpha P)(A) + (\beta Q)(A) \\ &= \alpha P(A) + \beta Q(A) \\ &= \alpha 0_n + \beta 0_n \qquad \text{car } P, Q \in N_A \\ &= 0_n\end{aligned}$$

donc $\alpha P + \beta Q \in N_A$.

Finalement, N_A est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$

/3,75 **7)** Montrer que si $P \in N_A$ et si $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $PQ \in N_A$. Est-ce que N_A est un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$?

Comme $P \in N_A$, on a :

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A) = 0_n Q(A)$$

Ainsi, $(PQ)(A) = 0_n$: on a donc $\boxed{PQ \in N_A}$.

Supposons par l'absurde que N_A est un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$. Alors l'élément neutre pour $\times$, i.e. $P := 1$, est un élément de N_A : cela entraine que

$$0_n = P(A) = I_n$$

ce qui est absurde. Ainsi, N_A n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$.

/5,5 **8)** Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Montrer que $N_{BAB^{-1}} = N_A$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(BAB^{-1})^k = \underbrace{BAB^{-1} \cdot BAB^{-1} \cdot BAB^{-1}}_{k \text{ fois}} = BA^kB^{-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
P \in N_{BAB^{-1}} &\iff \sum_{k=0}^{m} a_k (BAB^{-1})^k = 0_n \\
&\iff \sum_{k=0}^{m} a_k B A^k B^{-1} = 0_n \\
&\iff B\left(\sum_{k=0}^{m} a_k A^k\right) B^{-1} = 0_n \\
&\iff B \cdot P(A) \cdot B^{-1} = 0_n \\
&\iff P(A)B^{-1} = B^{-1}0_n = 0_n \qquad \text{car } B \in GL_n(\mathbb{K}) \\
&\iff P(A) = 0_n B = 0_n \qquad \text{car } B^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}) \\
&\iff P \in N_A
\end{aligned}$$

Ainsi, par arbitraire sur P, on a $N_{BAB^{-1}} = N_A$.

Partie IV : Polynôme annulateur minimal

Pour tout polynôme P, on note $P\mathbb{K}[X] := \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$: c'est donc l'ensemble des multiples de P. L'objectif de cette partie est de montrer que, étant donné $A \in M_n(\mathbb{K})$, il existe un unique polynôme unitaire noté Γ (qui dépend de A) dans $\mathbb{K}[X]$ tel que

$$N_A = \Gamma\mathbb{K}[X]$$

9) On note D l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs *non nuls* de A, donc :

$$D = \{\deg P \mid P \in N_A \text{ et } P \neq 0\}$$

/4 Justifier que D admet un minimum, qu'on notera d.

Soit $P \in N_A$ et $P \neq 0$. On en déduit que $\deg P \neq -\infty$, donc $\deg P \in \mathbb{N}$: on a donc bien $D \subset \mathbb{N}$.

De plus, D est non vide par la question **5)**. On en déduit que D est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et minorée (par 0 par exemple). Ainsi, D admet un minimum qu'on note d.

10) **a)** Soit $U, V \in N_A$ de degrés d. En utilisant une division euclidienne, montrer
/6 que $V \mid U$.

Comme $\deg V = d \in \mathbb{N}$, on a $V \neq 0$. On peut donc réaliser la divison euclidienne de U par V : il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U = VQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg R < d$$

En particulier, on a $U(A) = (VQ + R)(A) = V(A)Q(A) + R(A)$, donc

$$0_n = 0_n Q(A) + R(A) = R(A)$$

Cela conduit au fait que $R \in N_A$. Si on avait $R \neq 0$, alors $\deg R \in D$ et comme $\deg R < d$, cela contredirait le résultat de la question **9)**. Ainsi, $R = 0$ et donc $\boxed{V \mid U}$.

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré d dans N_A,
/5,5 qu'on notera Γ.

- Montrons d'abord l'existence. Par la question **9)**, il existe un polynôme P de degré d dans N_A. Si on note $\lambda \in \mathbb{K}^*$ son coefficient dominant, alors $\frac{1}{\lambda}P$ est un polynôme unitaire, de degré d et on a $\frac{1}{\lambda}P \in N_A$ car N_A est un s.e.v. par la question **6)**. Il y a donc existence d'un tel polynôme.
- Montrons maintenant l'unicité. Soit Γ_1, Γ_2 deux polynômes unitaires de degré d dans N_A. Montrons que $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Par la question précédente, on a $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$ et, par symétrie des rôles, $\Gamma_2 \mid \Gamma_1$. Ainsi, Γ_1 et Γ_2 sont associés : il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\Gamma_1 = \mu\Gamma_2$$

  Or, Γ_1 et Γ_2 sont tous deux unitaires, d'où en égalisant les coefficients dominants, on a $1 = \mu \times 1$: on a $\mu = 1$ donc $\Gamma_1 = \Gamma_2$. L'unicité est donc démontrée.

/5 **11)** **a)** Soit $P \in N_A$. Montrer que $\Gamma \mid P$.

Comme $\deg\Gamma = d \neq -\infty$, on a $\Gamma \neq 0$. On peut donc réaliser la division euclidienne de P par Γ : il existe donc Q, R dans $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$P = \Gamma Q + R \qquad \text{avec } \deg R < \deg \Gamma = d$$

Montrons que $R = 0$. En évaluant en A, on a

$$P(A) = (\Gamma Q + R)(A) = \Gamma(A)Q(A) + R(A)$$

Or, $\Gamma, P \in N_A$ donc $P(A) = \Gamma(A) = 0_n$. On en déduit que $R(A) = 0_n$, donc $R \in N_A$. Or, $\deg R < d$. En raisonnant comme en question **a)** , on a alors $R = 0$. Ainsi, $\Gamma \mid P$.

/3 **b)** Montrer que $N_A = \Gamma\mathbb{K}[X]$.

On procède par double inclusion.

- Soit $P \in \Gamma\mathbb{K}[X]$. Alors $P = \Gamma Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$. Or, comme $\Gamma \in N_A$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, on a $\Gamma Q \in N_A$ par la question **7)**, on a $P \in N_A$. Par arbitraire sur P, on a donc $\Gamma\mathbb{K}[X] \subset N_A$.
- Soit $P \in N_A$. Montrons que $P \in \Gamma\mathbb{K}[X]$. Par la question précédente, on a montré que $\Gamma \mid P$, donc $P \in \Gamma\mathbb{K}[X]$, d'où le résultat.

Partie V : Propriétés diverses du polynôme minimal

On rappelle que $d = \deg\Gamma$ (où Γ est le polynôme vu en section précédente). On pose $\mathcal{P}_A$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui s'écrivent $P(A)$ pour un polynôme P, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_A = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

/3 **12)** Justifier que $d \geq 1$.

On a déjà $d \in \mathbb{N}$. Il reste à montrer que $d \neq 0$. Supposons par l'absurde que $d = 0$. Comme Γ est unitaire, on a donc $\Gamma = 1$. Comme $\Gamma \in N_A$, on a ainsi

$$0_n = \Gamma(A) = I_n$$

ce qui est absurde. Donc $d \neq 0$, ce qui conclut.

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes.

/3,5 **13)** **a)** Montrer que $\mathcal{P}_A$ est un s.e.v de $M_n(\mathbb{K})$.

Il est clair que $\mathcal{P}_A \subset M_n(\mathbb{K})$, puisque $P(A) \in M_n(\mathbb{K})$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$.

- Avec $P = 0$, on a $P(A) = 0I_n = 0_n \in \mathcal{P}_A$.
- Soit $M, N \in \mathcal{P}_A$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Montrons que $\alpha M + \beta N \in \mathcal{P}_A$. Par définition, il existe $P, Q \in [X]$ tels que $M = P(A)$ et $N = Q(A)$.

$$\begin{aligned}\alpha M + \beta N &= \alpha P(A) + \beta Q(A)\\ &= (\alpha P + \beta Q)(A) \in \mathcal{P}_A\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}_A$ est un s.e.v. de $M_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe $T \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = T(A)$ et
/5 $\deg T < d$.

Comme $\deg\Gamma = d \geq 0$, on a $\Gamma \neq 0$: on peut réaliser la division euclidienne de P par Γ : il existe donc $Q, T \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P = Q\Gamma + T \quad \text{et} \quad \deg T < d$$

On a donc

$$\begin{aligned}P(A) &= Q(A)\Gamma(A) + T(A)\\ &= T(A) \qquad \text{car } \Gamma(A) = 0_n\end{aligned}$$

d'où le résultat.

c) En déduire la dimension de $\mathcal{P}_A$.
Indication : on pourra utiliser l'application suivante :

$$\varphi : \mathbb{K}_{d-1}[X] \to \mathcal{P}_A$$
$$P \mapsto P(A)$$

/7

Montrons que φ est linéaire. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. On a

$$\varphi(\alpha P + \beta Q) = (\alpha P + \beta Q)(A) = \alpha P(A) + \beta Q(A) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$$

d'où le résultat. Par la question précédente, on peut réécrire

$$\mathcal{P}_A = \{T(A) \mid T \in \mathbb{K}_{d-1}[X]\} = \operatorname{Im}\varphi$$

Ainsi, φ est surjective. Montrons que φ est injective. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. On a alors $P(A) = 0_n$, ce qui signifie que $P \in N_A$. Comme $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, on a en particulier $\deg P < d = \deg\Gamma$: cela entraine que $P = 0$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente. Ainsi φ est injective. Finalement φ est bijective et donc $\dim\mathcal{P}_A = \dim\mathbb{K}_{d-1}[X] = \boxed{d}$.

14) Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose dans cette question que $\Gamma = (X-2)(X-3)$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^m par Γ. En déduire une expression de
/7 A^m en fonction de m, I_n et A (mais pas A^2, A^3, etc.).

Soit $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ les quotient et reste de la division euclidienne de X^m par Γ : on a donc

$$X^m = (X-2)(X-3)Q(X) + R(X) \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg\Gamma = 2$$

Ainsi, $R = \alpha X + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. En évaluant l'égalité ci-dessus aux points 2 et 3, on obtient :

$$\begin{cases} 2^m = 0 + 2\alpha + \beta \\ 3^m = 0 + 3\alpha + \beta \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à :

$$\begin{cases} \alpha = 3^m - 2^m \\ \beta = 3 \times 2^m - 2 \times 3^m \end{cases}$$

Ainsi, le reste recherché est

$$\boxed{R = (3^m - 2^m)X + 3 \times 2^m - 2 \times 3^m}$$

En particulier, après évaluation en A, on en déduit que :

$$A^m = \cancel{\Gamma(A)}Q(A) + R(A)$$

et donc

$$\boxed{A^m = (3^m - 2^m)A + (3 \times 2^m - 2 \times 3^m)\, I_n}$$

15) On pose $\Gamma = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_0, \cdots, a_d \in \mathbb{K}$. Montrer que $a_0 \neq 0$ si et seulement

/10 si A est inversible et que dans ce cas, on a $A^{-1} \in \mathcal{P}_A$.

- Prouvons le sens réciproque par contraposée. Supposons $a_0 = 0$ et montrons que A n'est pas inversible. Comme Γ annule A, on a

$$0_n = \Gamma(A) = \sum_{k=1}^{d} a_k A^k = A\left(\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}\right)$$

  Supposons par l'absurde que A soit inversible. En multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient :

$$0_n = \sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1} = \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} A^k$$

  Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} X^k$ annule donc A et est de degré au plus $d-1$ donc $\deg P < d = \deg \Gamma$. On en déduit que $P = 0$. En particulier, le

coefficient de degré $d-1$ de P est nul, i.e. $a_d = 0$. Or, a_d est le coefficient dominant de Γ, qui est unitaire. Donc $a_d = 1$. Ainsi $1 = 0$: contradiction. Finalement, A n'est pas inversible.

- Prouvons le sens direct. Supposons $a_0 \neq 0$. Alors $\sum_{k=1}^{d} a_k A^k = -a_0 I_n$ donc $A \times \left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}\right) = I_n$. On en déduit que A est inversible. Cela montre aussi que

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1}\left(-\frac{a_{k+1}}{a_0}\right) A^k \in \mathcal{P}_A \end{aligned}$$

16) On suppose qu'une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ admet pour polynôme minimal $\Lambda \in$

/8 $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si Γ et Λ sont premiers entre eux, alors $N_A + N_B = \mathbb{K}[X]$.

Par la question **b)** , il suffit de montrer que $\Gamma\mathbb{K}[X] + \Lambda\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X]$. On procède par double inclusion. Il est clair que $\Gamma\mathbb{K}[X] + \Lambda\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}[X]$. Montrons l'autre inclusion. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrons que $P \in \Gamma\mathbb{K}[X] + \Lambda\mathbb{K}[X]$.

Comme Γ et Λ sont premiers entre eux, par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$U\Gamma + V\Lambda = 1$$

En multipliant cette égalité par P, on en déduit que

$$P = \Gamma(PU) + \Lambda(PV) \in \Gamma\mathbb{K}[X] + \Lambda\mathbb{K}[X]$$

D'où l'égalité voulue.